17. Fator integrante

Lembrete 17.0.1 Temos que

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{17.1}$$

é exata se e somente se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(condição de Euler). Neste caso solução de (17.1) é a curva de nível $\psi(x,y) = C$, onde

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = P, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

Suponhamos que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ou seja (17.1) não é exata.

Ideia: Achar $\mu(x,y) \neq 0$ (fator integrante) tal que

$$\mu(x,y) \cdot P(x,y)dx + \mu(x,y) \cdot Q(x,y)dy = 0, \tag{17.2}$$

seja exata. Isso acontece se e somente se

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}. \tag{17.3}$$

Assim se for possível achar $\mu(x,y)$ tal que a condição (17.3) seja satisfeita, obtemos equação exata (17.2) e

$$\{\text{cojunto das soluções de (17.1)}\} = \{\text{conjunto das soluções de (17.2)}\}.$$

Casos particulares:

1) Suponha que o fator integrante depende apenas da variável x, isto é $\mu(x,y) = g(x)$. Neste caso temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = g(x)\dfrac{\partial P}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x} = g(x)\dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q \cdot \dfrac{dg}{dx}. \end{cases}$$

Portanto (17.3) implica que

$$g(x)\frac{\partial P}{\partial y} = g(x)\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{dg}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{dx} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} g(x).$$

Como $\dfrac{dg}{dx}$ e $g(x)$ dependem apenas de x, a função $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} g(x)$ depende apenas de x!

Reciprocamente, se $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} g(x)$ depende apenas de x, logo existe fator integrante $\mu(x,y) = g(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dg}{dx} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} g(x) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dg}{g} = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|g| = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx,$$

portanto

$$|g(x)| = \exp\left(\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx\right).$$

2) Analogamente o fator integrante dependente apenas de y, $\mu(x,y) = h(y)$, existe se, e somente se, $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ depende apenas de y e

$$|h(y)| = \exp\left(\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy\right).$$

■ **Exemplo 17.1** Ache a solução geral da equação:

$$y \cos x dx + (y+2) \operatorname{sen} x dy = 0.$$

Solução. Temos $P(x,y) = y\cos x$ e $Q(x,y) = (y+2) \cdot \operatorname{sen} x$. É fácil ver que a condição de Euler não é satisfeita

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos x \neq (y+2) \cdot \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Talvez existe o fator integrante $\mu(x,y) = g(x)$? Temos

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{\cos x - (y+2)\cos x}{(y+2)\operatorname{sen} x}.$$

Como a última expressão depende de duas variáveis, o fator integrante $g(x)$ NÃO existe.

Talvez existe o fator integrante $\mu(x,y) = h(y)$? Temos

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{(y+2)\cos x - \cos x}{y \operatorname{sen} x} = \frac{(y+1)\cos x}{y \cos x} = \frac{y+1}{y}.$$

Como a última expressão depende apenas da variável y, o fator integrante $h(y)$ existe! Logo

$$|h(y)| = \exp\Big(\int \frac{y+1}{y} dy\Big) = \exp(y + \ln|y| + C) = C_1 \cdot |y| \cdot e^y, \quad C_1 > 0. \tag{17.4}$$

Assim $h(y) = y \cdot e^y$ é fator integrante (como $y \cdot e^y$ satisfaz a identidade (17.4)). Multiplicando a equação inicial por $h(y)$, obtemos a equação exata

$$y^2 \cdot e^y \cdot \cos x dx + e^y \cdot y \cdot (y+2) \cdot \operatorname{sen} x dy = 0,$$

logo existe $\psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 \cdot e^y \cdot \cos x = \tilde{P}, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = e^y \cdot y \cdot (y+2) \cdot \operatorname{sen} x = \tilde{Q}. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} & \psi(x,y) = \int y^2 \cdot e^y \cdot \cos x dx + f(y) = y^2 e^y \operatorname{sen} x + f(y) \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x (2y e^y + y^2 \cdot e^y) + f'(y) = \tilde{Q} = e^y (y+2) \operatorname{sen} x \\ \Longrightarrow \quad & f'(y) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & f(y) = C_1. \end{aligned}$$

Assim, $\psi(x,y) = y^2 e^y \operatorname{sen} x + C_1$. Portanto

$$y^2 e^y \operatorname{sen} x = C$$

é solução geral. ;-)

■ **Exemplo 17.2** Ache k tal que $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^k}$ seja fator integrante para

$$x^2 y^3 + x(1+y^2) y' = 0, \tag{17.5}$$

e resolve PVI com $y(1) = 2$.

Solução. (17.5) implica

$$x^2 y^3 dx + x(1+y^2) dy = 0.$$

Como $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^k}$ é fator integrante, a equação

$$\mu(x,y) \cdot x^2 \cdot y^3 dx + x(1+y^2) \cdot \mu(x,y) dy = 0$$

é exata se, e somente se, a condição de Euler for valida:

$$
\begin{aligned}
&\qquad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x},\\
&\iff \quad \frac{\partial(\mu(x,y)x^2y^3)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)\cdot x(1+y^2)}{\partial x},\\
&\iff \quad \frac{\partial(xy^{3-k})}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{1}{y^k}+y^{2-k})}{\partial x}\\
&\iff \quad \frac{\partial(xy^{3-k})}{\partial y} = 0, \quad \text{pois } \frac{1}{y^k}+y^{2-k} \text{ não depende de } x,\\
&\implies \quad x\cdot y^{3-k} \text{ não depende de } y,\\
&\implies \quad y^{3-k} = \text{const},\\
\implies &\quad k = 3.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\frac{1}{xy^3}x^2y^3dx + \frac{1}{xy^3}x(1+y^2)dy = 0$$

é exata, ou seja para

$$xdx + (\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y})dy = 0$$

existe $\psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = x, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \dfrac{1}{y^3} - \dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

Então

$$
\begin{aligned}
&\psi(x,y) = \int xdx + h(y) = \frac{x^2}{2} + h(y)\\
\implies &\frac{\partial\psi}{\partial y} = h'(y) = \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y}\\
\implies &h'(y) = -\frac{1}{2y^2} + \ln|y| + C_1\\
\implies &\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| + C_1\\
\implies &\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln|y| = C
\end{aligned}
$$

é solução geral. Como $y(1) = 2$, temos $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \ln 2 = C$, ou seja $C = \frac{3}{8} + \ln 2$, portanto

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + \ln|y| = \frac{3}{8} + \ln 2$$

é solução do PVI. ;-)

17.1 Equações lineares de 1^a ordem.

Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y(x) = q(x). \tag{17.6}$$

Observe que ela é linear respeito y.

De (17.6) obtemos

$$\left[p(x)y(x) - q(x)\right] \cdot dx + 1 \cdot dy = 0. \tag{17.7}$$

Sejam $P = p(x)y(x) - q(x)$ e $Q = 1$. Agora temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = p(x) \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

logo (17.8) não é exata. Por outro lado

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$$

depende só de x. Assim existe o fator integrante

$$g(x) = \exp(\int p(x)dx)$$

e

$$\exp(\int p(x)dx) \cdot [p(x)y(x) - q(x)]dx + \exp(\int p(x)dx)dy = 0$$

é exata. Portanto

$$\begin{aligned}
& \exp(\int p(x)dx) \cdot p(x) \cdot y + \exp(\int p(x)dx)\frac{dy}{dx} = \exp(\int p(x)dx) \cdot q(x) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left(y(x)\exp(\int p(x)dx)\right) = \exp(\int pdx) \cdot q(x) \\
\Longrightarrow \quad & y(x)\exp(\int p(x)dx) = \int \exp(\int pdx)q(x)dx + C \\
\Longrightarrow \quad & y = \exp(-\int pdx)\left[\int \exp(\int pdx)q(x)dx + C\right]
\end{aligned}$$

é solução geral.

■ **Exemplo 17.3** Ache a solução geral da equação linear

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x.$$

Solução. Temos que

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x. \tag{17.8}$$

Procuremos o fator integrante

$$g(x) = \exp(\int p dx) = \exp(-\int \frac{4}{x} dx) = \exp(-4\ln|x| + C_1) = x^{-4} \cdot C_2, \quad C_2 > 0$$

Seja $C_2 = 1$. Multiplicando (17.8) por $g(x) = \frac{1}{x^4}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x^4}\frac{dy}{dx} - 4\frac{1}{x^5}y = xe^x, \\
\Longrightarrow \quad & \frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^x, \\
\Longrightarrow \quad & x^{-4}y = \int xe^x dx = e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \\
\Longrightarrow \quad & y = x^5e^x - x^4e^x + C_3x^4.
\end{aligned}$$

;-)